Solidi rotondi o di rotazione

Vengono chiamati solidi rotondi figure dello spazio costruite per rotazione: si introduce così nella geometria un aspetto dinamico.

Quando si considera una figura piana che fa un giro completo attorno a una retta, bisogna pensare quante sono le possibili posizioni della retta rispetto alla figura stessa ...

Prima di considerare i solidi rotondi fondamentali è importante sottolineare che è necessario dare all'allievo la consapevolezza dell'immensa varietà di forme che si possono concepire, anche al di là dei poliedri e dei solidi rotondi.

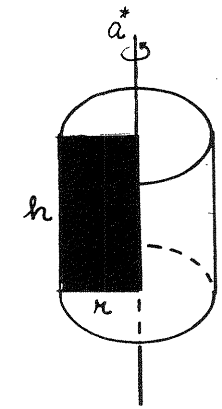
Cilindro

Data una retta a^* e una distanza r, si dice cilindro di asse a^* e raggio r la superficie che si ottiene facendo ruotare attorno ad a^* una retta parallela ad a^* e distante r da essa.
Le varie rette, tutte fra loro parallele e tutte parallele ad a^*, in cui si trasforma questa retta nel corso della rotazione si dicono generatrici del cilindro.

Si dice cilindro retto limitato il solido che si ottiene racchiudendo un cilindro illimitato fra

due piani perpendicolari all'asse.

Per i ragazzi:
Il cilindro è il solido che si ottiene dalla rotazione di un rettangolo attorno alla retta che contiene un lato: il lato opposto a questo genera la superficie laterale del cilindro e ne rappresenta l'altezza, i due lati perpendicolari generano le basi circolari del cilindro.



Poiché la superficie laterale del prisma, sviluppabile in un piano, è un rettangolo che ha per base la circonferenza del cerchio di base del cilindro e per altezza l'altezza del cilindro stesso, è facile esprimere l'area della della superficie totale

$$S_t = 2S_b + S_l = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r+h)$$

Per il calcolo del volume si fa riferimento al prisma e pertanto

$$V = S_b \cdot h = \pi r^2 h$$

Per determinare un cilindro retto occorrono dunque in genere <u>due parametri indipendenti</u>: r ed h.

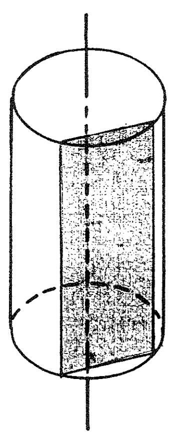
Nel caso del <u>cilindro equilatero</u>, in cui l'altezza è uguale al diametro di base, basta assegnare un unico parametro: r.
Per il cilindro equilatero risulta

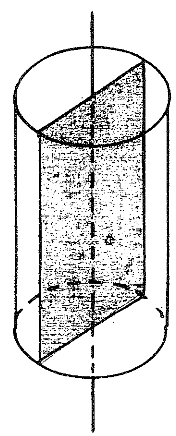
$$S_t = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2$$
$$V = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$$

Consideriamo alcune sezioni piane del cilindro (r, h):

- <u>rettangoli</u>: ottenuti con piani paralleli all'asse di rotazione

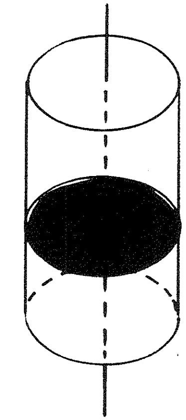
  Tali rettangoli hanno tutti la stessa altezza h mentre la base b è tale che $0 < b \leq 2r$.





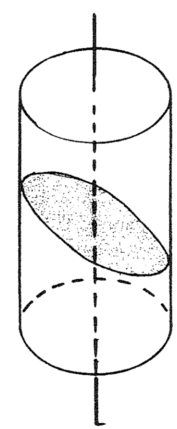
- <u>cerchi</u>: ottenuti con piani perpendicolari all'asse di rotazione

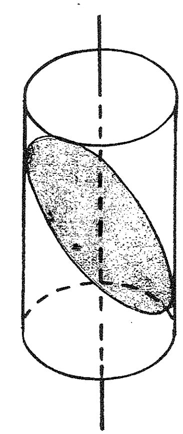
  I cerchi sono tutti uguali ai cerchi di base.



- <u>ellissi</u> (non circolari): ottenuti con piani incidenti (non perpendicolarmente) l'asse di rotazione

  L'asse minore di tali ellissi è sempre il diametro di base mentre l'asse maggiore m è tale che $2r < m \leq \sqrt{4r^2+h^2}$





- Si vuol costruire un cilindro; per formarne la superficie laterale si utilizza un foglio rettangolare di dimensioni a e b con $a > b$.
In quanti modi si può fare la costruzione?
Evidentemente si possono costruire due cilindri a seconda che si scelga per l'altezza a o b.
Che cosa si può dire dell'area della superficie laterale dei due cilindri? dell'area della superficie totale? del volume?

altezza a

$S_{l_1} = ab$

$S_{t_1} = ab + 2\pi\left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 = ab + \frac{b^2}{2\pi}$

$V_1 = \pi\left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 a = \frac{ab^2}{4\pi}$

altezza b

$S_{l_2} = ab$

$S_{t_2} = ab + 2\pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 = ab + \frac{a^2}{2\pi}$

$V_2 = \pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 b = \frac{a^2 b}{4\pi}$

Risulta:

$S_{l_1} = S_{l_2}$

$S_{t_1} < S_{t_2}$

$V_1 < V_2$

- In un contenitore cubico di lato 100 cm si vogliono sistemare barattoli cilindrici del tipo usato per conserve alimentari, disposti in file parallele e a piani sovrapposti. Per meglio utilizzare lo spazio converrà usare barattoli grandi o piccoli?

Indichiamo con r_1 e r_2 il raggio di base di due barattoli cilindrici diversi; supponiamo che r_1 e r_2 siano espressi in centimetri e che $2r_1$ e $2r_2$ siano sottomultipli di 100, cioè $2r_1 n_1 = 100$ e $2r_2 n_2 = 100$ con $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.
Calcoliamo lo spazio lasciato libero nella base della scatola da ciascun tipo di barattolo:

$S_1 = 100^2 - \pi r_1^2 n_1^2$ $\qquad$ $S_2 = 100^2 - \pi r_2^2 n_2^2$

Sarà $S_1 \lesseqgtr S_2$ se $100^2 - \pi r_1^2 n_1^2 \lesseqgtr 100^2 - \pi r_2^2 n_2^2$

ovvero se $\pi r_1^2 n_1^2 \gtreqless \pi r_2^2 n_2^2$.

Poiché $n_1 = \frac{50}{r_1}$ e $n_2 = \frac{50}{r_2}$, si ha

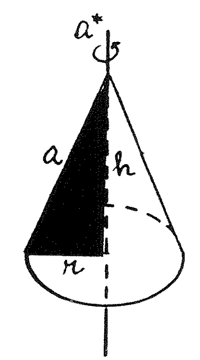
$\pi r_1^2 \frac{50^2}{r_1^2} \gtreqless \pi r_2^2 \frac{50^2}{r_2^2}$.

Si vede dunque che $S_1 = S_2$: lo spazio lasciato libero non dipende dal raggio del barattolo.

Cono

Date due semirette a^* e b incidenti in un punto, si dice <u>cono</u> la superficie che si ottiene facendo ruotare b attorno ad a^*. La semiretta a^* viene detta <u>asse</u> del cono, mentre le semirette con cui viene a coincidere la retta b nel suo moto si dicono <u>generatrici</u>; la misura φ dell'angolo $\widehat{a^*b}$, che si suppone acuto, viene chiamata <u>apertura</u> del cono.
Si dice <u>cono retto limitato</u> il solido che si ottiene chiudendo un cono illimitato con un piano perpendicolare all'asse.

Per i ragazzi:
Il cono è il solido che si ottiene dalla rotazione di un triangolo rettangolo attorno a un suo cateto che rappresenta l'<u>altezza</u> del cono stesso: l'ipotenusa del triangolo genera la <u>superficie laterale</u> del cono e ne rappresenta l'<u>apotema</u>, il secondo cateto genera la <u>base circolare</u> del cono.



La superficie laterale del prisma, <u>sviluppabile in un piano</u>, è un settore circolare appartenente a un cerchio di raggio l'apotema e il cui arco è la circonferenza del cerchio di base del cono. Pertanto si può esprimere l'area della superficie totale

$$S_t = \pi r^2 + \pi r a$$

Per il calcolo del volume si fa riferimento alla piramide e quindi

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Il cono retto dipende da <u>due parametri indipendenti</u> scelti a piacere fra r, h, a.

Nel caso del <u>cono equilatero</u> l'apotema è uguale al diametro di base e pertanto basta assegnare un unico parametro: r.
Per il cono equilatero si ha

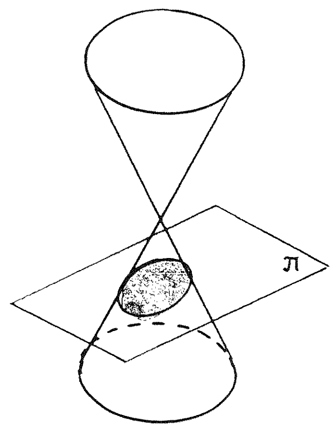
$$S_t = \pi r^2 + \frac{1}{2}2\pi r \cdot 2r = 3\pi r^2$$

È opportuno osservare che la superficie laterale di un cono equilatero è data da mezzo cerchio di diametro $2r$.

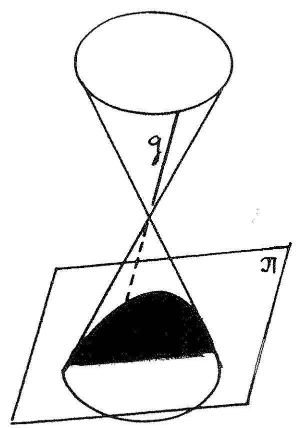
Sezionando la superficie di un cono illimitato con un piano si ottengono curve diverse che vengono chiamate <u>coniche</u>.

- Se il piano π non è parallelo ad alcuna generatrice, la curva sezione è un'<u>ellisse</u>

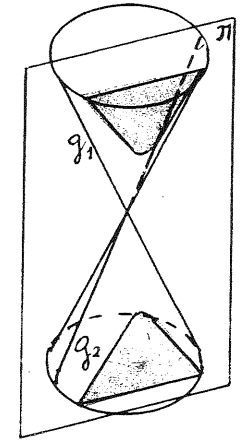
o in particolare una <u>circonferenza</u>.



- Se il piano π è parallelo a una sola generatrice g_1 la sezione è una <u>parabola</u>.



- Se il piano π è parallelo a due generatrici g_1 e g_2, si ha come intersezione una <u>iperbole</u>. Se in particolare il piano passa per il vertice, si ottiene una <u>coppia di rette</u>.



- Si vuol costruire in cartoncino un cono il cui raggio di base misuri 3 cm e la cui altezza misuri 4 cm. Come si deve disegnare lo sviluppo piano della superficie totale del cono richiesto?

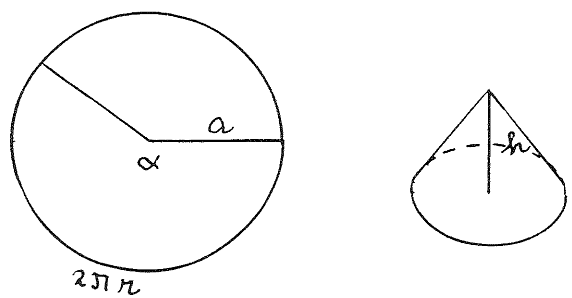
Il problema da risolvere è quello di determinare i dati necessari per costruire il settore circolare che rappresenta la superficie laterale del cono.
Il raggio di tale settore, cioè l'apotema a del cono, si può <u>facilmente</u> calcolare:
$a = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (in centimetri).
È necessario ora determinare l'angolo al centro α del settore:

$2\pi r : 2\pi a = \alpha : 360°$

$6\pi : 10\pi = \alpha : 360°$

$\alpha = \dfrac{6\pi \cdot 360°}{10\pi} = 216°$

- Da un disco circolare di carta si possono ritagliare settori circolari di varia ampiezza: con ciascuno di essi si può costruire la superficie laterale di un cono retto. Al variare da 0° a 360° dell'ampiezza del settore circolare, come varia il raggio di base del cono? Come varia l'altezza? Che cosa rimane costante? Come variano l'area della base e quella della superficie laterale? Come varia il volume?



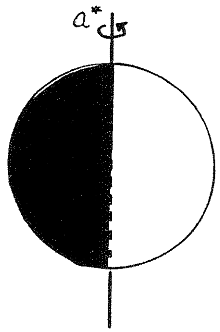
Poiché $\alpha = \dfrac{360° r}{a}$, risulta $r = \dfrac{a}{360°}\alpha$ cioè r è direttamente proporzionale ad α.
Si può calcolare h: $h = \dfrac{a}{360°}\sqrt{360°^2-\alpha^2}$ da cui si ricava che h diminuisce all'aumentare di α.
L'apotema del cono rimane evidentemente costante.

L'area di base risulta: $S_b = \pi r^2 = \pi \dfrac{a^2}{360°^2}\alpha^2$;
S_b varia quindi con il quadrato di α.
La superficie laterale è data da $S_l = \pi r a = \pi \dfrac{a^2}{360°}\alpha$ ovvero S_l è direttamente proporzionale ad α.
Infine il volume è $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3} = \dfrac{\pi a^3}{3\cdot 360°^3}\alpha^2\sqrt{360°^2-\alpha^2}$.
Per $\alpha = 0°$ o per $\alpha = 360°$ il volume risulta nullo; pertanto fra questi valori estremi V deve ammettere almeno un massimo.
Il volume è massimo quando è massimo il valore della funzione $\alpha^2\sqrt{360°^2-\alpha^2}$, cioè quando è massimo il prodotto $\alpha^4(360°^2-\alpha^2)$.
Il prodotto considerato si può trasformare nel prodotto di tre fattori con somma costante: $\alpha^4(360°^2-\alpha^2) = 4\dfrac{\alpha^2}{2}\cdot\dfrac{\alpha^2}{2}\cdot(360°^2-\alpha^2)$ dove $\dfrac{\alpha^2}{2}+\dfrac{\alpha^2}{2}+360°^2-\alpha^2 = 360°^2$. Tale prodotto è massimo quando i fattori sono uguali, ovvero per $\dfrac{\alpha^2}{2} = 360°^2-\alpha^2$ cioè per $\alpha = 360°\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.
In definitiva il volume è massimo per $\alpha = 360°\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Sfera

Si dice sfera di centro O e raggio r il luogo dei punti dello spazio che hanno distanza r da O.

Per i ragazzi:
La sfera è il solido che si ottiene dalla rotazione di un semicerchio attorno al diametro.



La sfera è caratterizzata da <u>un unico parametro</u>: r.

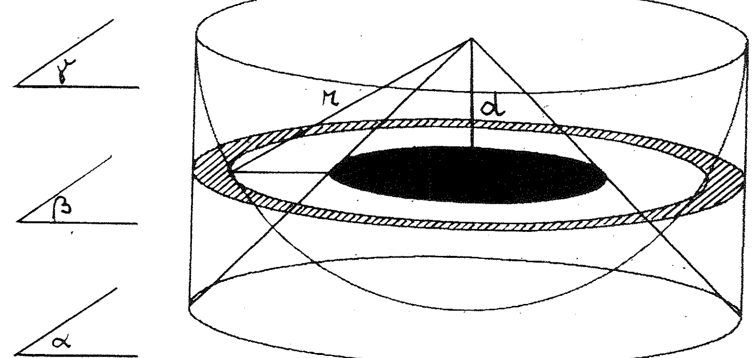
Con la sfera si introduce un elemento di forte "novità" rispetto ai solidi prima considerati: la superficie sferica <u>non</u> è <u>sviluppabile</u>.

Ciò ha conseguenze importanti:
le carte geografiche ...
il calcolo dell'area della superficie totale ...

Per giungere alle formule del volume e dell'area della superficie totale in modo "consapevole" si possono proporre due percorsi:

1) <u>Si parte dalla ricerca del volume della sfera e con questo si va all'area della superficie.</u>

Per determinare il volume della sfera si ricorre alla <u>scodella di Galileo</u>, che si ottiene togliendo a un mezzo cilindro equilatero una mezza sfera. Si tratta di rendersi conto che la scodella ha lo stesso volume di un cono con base coincidente con la base del cilindro e vertice nel centro della semisfera. Questa equivalenza si dimostra per mezzo del principio di Cavalieri, notando che ogni piano parallelo al piano di base taglia la scodella e il cono secondo due figure aventi la stessa area.



Le sezioni della scodella e del cono con il piano di base α sono rappresentate dallo stesso cerchio di base dei due solidi e quindi

$S_{\alpha\,scod} = \pi r^2$ $\quad$ $S_{\alpha\,cono} = \pi r^2$

Un piano qualsiasi β, parallelo ad α e distante d dal vertice del cono, determina sulla scodella una corona circolare di raggi r e r_1 e sul cono un cerchio di raggio r_2. Poiché $r_1^2 = r^2 - d^2$ e $r_2 = d$, si ha

$$S_{\beta\,scod} = \pi(r^2 - r_1^2) = \pi(r^2 - r^2 + d^2) = \pi d^2 \qquad S_{\beta\,cono} = \pi r_2^2 = \pi d^2$$

Infine il piano γ, parallelo ad α e a β e passante per il vertice del cono, seziona la scodella secondo una circonferenza e il cono in un punto; risulta perciò

$$S_{\gamma\,scod} = 0 \qquad S_{\gamma\,cono} = 0$$

Si può allora affermare $V_{scod} = V_{cono}$ ovvero $V_{cil} - V_{semisfera} = V_{cono}$ da cui

$$V_{semisfera} = V_{cil} - V_{cono} = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$$

In definitiva si ha

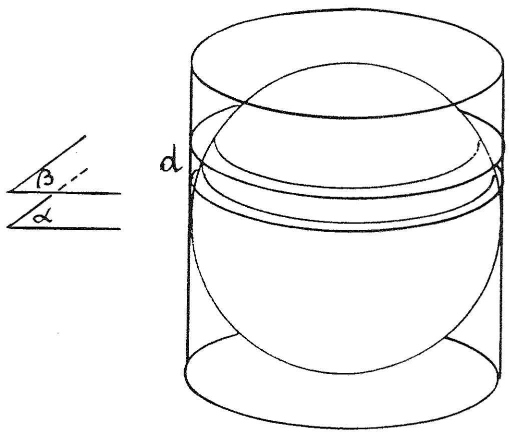
$$V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Conosciuto il volume della sfera, si può trovare l'area della corrispondente superficie, ricorrendo alla seguente considerazione intuitiva. Una qualsiasi <u>superficie poliedrica circoscritta alla sfera</u>, cioè tale che ogni sua faccia sia tangente alla sfera, limita un solido che può essere decomposto nella somma delle varie piramidi, che hanno come vertice comune il centro della sfera e come basi le singole facce della superficie poliedrica: tutte queste piramidi hanno per altezza il raggio della sfera. Il volume di tutto il poliedro è uguale a $\frac{1}{3}$ del prodotto del raggio per l'area della superficie poliedrica. Immaginando ora che ciascuna faccia della superficie poliedrica diventi estremamente piccola, il poliedro e la sfera finiscono col confondersi l'uno con l'altra e altrettanto accade delle superfici. Quindi risulta $V_{sfera} = \frac{1}{3} S_{sfera}\, r$ da cui $S_{sfera} = \frac{3V_{sfera}}{r}$ e quindi

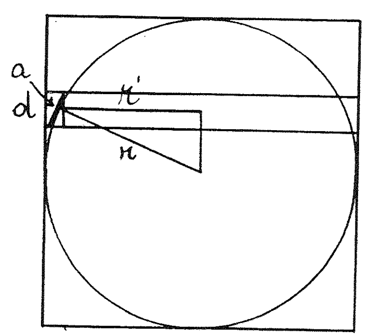
$$S_{sfera} = 4\pi r^2$$

2) <u>Si parte dalla ricerca dell'area della superficie sferica e con questa si va al volume.</u>

Per determinare l'area della superficie sferica si inscrive la sfera in un cilindro equilatero con l'obiettivo di dimostrare che l'area della superficie sferica equivale all'area della superficie laterale del cilindro. Anzi si farà vedere che questo succede striscia per striscia ottenuta tagliando con piani paralleli alle basi del cilindro sia la superficie sferica che quella del cilindro.



Si può dare una giustificazione del fatto che la striscia determinata sulla superficie laterale del cilindro dai due piani distanti d è equivalente alla striscia determinata sulla superficie sferica. È conveniente vedere la situazione su una sezione mediana dei due solidi.



La striscia determinata dai piani α e β sulla superficie laterale del cilindro è la superficie

laterale di un cilindretto di raggio r e di altezza d e quindi $S^*_{cil} = 2\pi r d$.
Gli stessi piani α e β determinano sulla superficie sferica una striscia di cui possiamo esprimere l'area in modo approssimato. Pensiamo anche ora alla superficie laterale di un cilindretto di raggio r', intermedio fra i raggi r_1 e r_2 delle circonferenze sezionate sulla superficie sferica dai piani α e β, e di altezza a, segmento tangente alla sfera nell'estremo di r', e quindi $S^*_{sfera} = 2\pi r' a$. I triangoli rettangoli disegnati in figura sono simili e perciò $\frac{r'}{r} = \frac{d}{a}$. Risulta allora $S^*_{sfera} = 2\pi \frac{d}{a} r a = 2\pi r d$.
Dall'equivalenza striscia per striscia si ricava l'equivalenza tra la superficie della sfera e la superficie laterale del cilindro, per cui

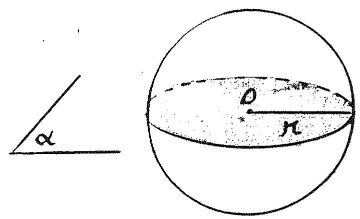
$$S_{sfera} = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$$

Dall'area della superficie della sfera si può risalire al volume, facendo intervenire lo stesso poliedro considerato nel primo percorso. Si può dunque dire

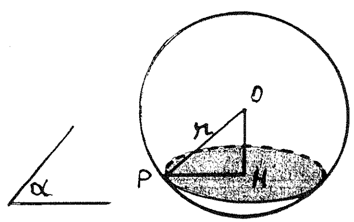
$$V_{sfera} = \frac{1}{3} S_{sfera} \cdot r = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Proponiamoci di trovare le sezioni di una sfera. Emerge un fatto interessante: tagliando

una sfera con un piano qualsiasi si ottiene un <u>cerchio</u> (o un punto).
Dimostriamolo.
Un piano che passa per il centro della sfera la sega secondo un cerchio di raggio uguale a quello della sfera.



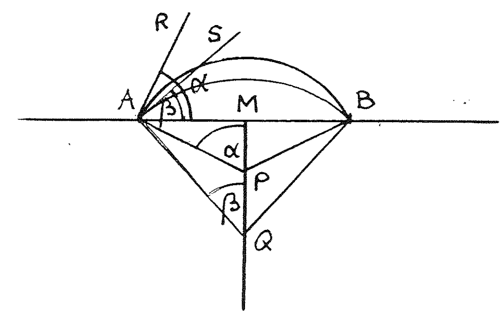
Consideriamo ora un piano α non passante per il centro O e tale che la distanza $\overline{OH}$ di α da O sia minore del raggio



Prendiamo un qualsiasi punto P dell'intersezione del piano α con la superficie sferica.
Poiché OH è <u>perpendicolare</u> al piano α, risulta $\overline{PH} = \sqrt{r^2 - \overline{OH}^2}$. Quindi i punti P appartengono a una circonferenza di centro H e di raggio $\overline{PH}$.
Ma ci sono punti Q di tale circonferenza, appartenente ad α, che non appartengano alla superficie sferica? Evidentemente no, perché, se $\overline{QH} = \sqrt{r^2 - \overline{OH}^2}$, si ha $\overline{QO} = \sqrt{r^2 - \overline{OH}^2 + \overline{OH}^2} = r$.

- Nello spazio quante circonferenze passano per due punti A e B? Consideriamone due di raggio diverso: la distanza tra A e B lungo la circonferenza di raggio maggiore è maggiore o minore della distanza tra A e B lungo la circonferenza di raggio minore?

Possiamo supporre che le due circonferenze per A e B e di raggio diverso appartengano allo stesso piano e che i loro centri si trovino, rispetto alla retta AB nello stesso semipiano.



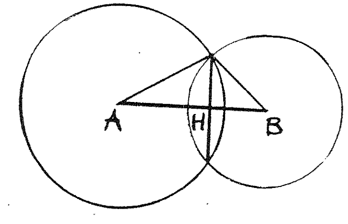
Siano P e Q i rispettivi centri con $\overline{PM} < \overline{QM}$ dove M è il punto medio di AB; si ha allora $\overline{AP} < \overline{AQ}$. Indichiamo $A\hat{P}M$ con α e $A\hat{Q}M$ con β: l'angolo $A\hat{P}M$ è esterno rispetto al triangolo

APQ e perciò $\alpha > \beta$.
Le semirette AR e AS tangenti in A rispettivamente ai cerchi di centro P e di centro Q, disposte rispetto ad AB nel semipiano opposto a quello in cui si trovano P e Q sono tali $B\hat{A}R = \alpha$ e $B\hat{A}S = \beta$: la semiretta AS è interna all'angolo $B\hat{A}R$ e così il segmento circolare limitato dalla corda AB e dall'arco appartenente alla circonferenza di centro P.
Poiché, se due figure convesse sono una interna all'altra, il contorno di quella interna ha lunghezza minore di quella del contorno della figura contenente, l'arco di estremi A e B appartenente alla circonferenza di centro Q è minore di quello con gli stessi estremi appartenente alla circonferenza di centro P.

- Qual è la minima distanza lungo una superficie sferica fra due suoi punti A e B?

I cammini sulla sfera che congiungono due punti A e B della stessa sfera possono appartenere a un piano oppure no: quelli che appartengono ad un piano sono senz'altro di lunghezza minore di quelli che non vi appartengono. Perciò il cammino minimo va cercato fra gli archi di estremi A e B appartenenti ai cerchi sezione della sfera con piani passanti per la retta AB.
Sappiamo che l'arco minimo fra quelli che hanno per estremi due punti è quello appartenente al cerchio di raggio massimo, cioè l'arco minore del cerchio massimo passante per A e B.

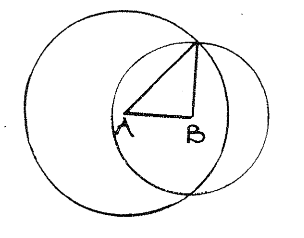
- Due sfere secanti hanno raggio di 3 cm e 4 cm rispettivamente. Quanto devono essere distanti i loro centri perché si taglino secondo un cerchio di raggio 2 cm? di raggio 3 cm? Si possono tagliare secondo un raggio di 3,5 cm?



a) Siano A e B i centri delle sfere di raggio 4 cm e 3 cm rispettivamente, H sia il centro dell'intersezione; si ha in centimetri

$\overline{AH} = \sqrt{4^2-2^2} = 2\sqrt{3}$ $\quad \overline{HB} = \sqrt{3^2-2^2} = \sqrt{5}$ $\quad \overline{AB} = 2\sqrt{3}+\sqrt{5}$

b) Nel caso che l'intersezione sia un cerchio di raggio 3 cm, tale intersezione è un cerchio massimo della sfera minore e il centro del cerchio intersezione è il centro B della seconda sfera; dunque risulta



$\overline{AB} = \sqrt{4^2-3^2} = \sqrt{7}$

c) Non è possibile un' intersezione con cerchio di raggio superiore a 3 cm che è il raggio dei cerchi massimi della sfera più piccola.